

УДК 517.55

А.К. Бахтин, Г.П. Бахтина, И.В. Денег

A.K. Bakhtin, G.P. Bakhtina, I.V. Denega

Оценки произведения внутренних радиусов взаимно неналегающих областей в многомерных комплексных пространствах

Estimates of product of inner radii of mutually non-overlapping domains in multidimensional complex spaces

We study extremal problem on the product of power of generalized inner radii of non-overlapping domains in \mathbb{C}^n .

Роботу присвячено розв'язанню екстремальної задачі про добуток степенів узагальнених внутрішніх радіусів неналегаючих областей в \mathbb{C}^n .

Целью данной работы является рассмотрение задачи о произведении степеней обобщенных внутренних радиусов полицилиндрических неналегающих областей с полюсами на лучевой системе точек. Эта задача относится к разряду задач с так называемыми "свободными" полюсами (см., например, [10]). Пространственные аналоги ряда известных результатов о неналегающих областях на плоскости были получены в работе [9]. Для этого в [9] было обобщено понятие внутреннего радиуса, а именно, введено понятие гармонического радиуса пространственной области $B \subset R^n$ относительно некоторой внутренней точки. Пожалуй, работа [9] является единственной работой, где удалось значительно продвинуться в получении результатов о неналегающих областях для пространственного случая. В тоже время для случая комплексной плоскости задачи о неналегающих областях представляют достаточно хорошо разработанное направление геометрической теории функций комплексного переменного (см., например [1–15]).

В работе [11] был получен метод, который позволил обобщить некоторые результаты геометрической теории функций комплексного переменного на многомерные комплексные пространства. В частности, в этой же работе были предложены аналоги известных теорем теории однолистных функций.

Пусть \mathbb{N} , \mathbb{R} – множества натуральных и вещественных чисел соответственно, \mathbb{C} – плоскость комплексных чисел, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ – ее одноточечная компактификация, $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$. По определению $\mathbb{C}^n = \underbrace{(\mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \dots \times \mathbb{C})}_{n\text{-раз}}$, $n \in \mathbb{N}$ (см., например, [4–6]).

$\overline{\mathbb{C}}^n = \underbrace{(\overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}} \times \dots \times \overline{\mathbb{C}})}_{n\text{-раз}}$ – компактификация пространства \mathbb{C}^n , далее так

называемое пространство теории функций (см., например, [4–6]).

Ясно, что $\mathbb{C}^1 = \mathbb{C}$, $\overline{\mathbb{C}}^1 = \overline{\mathbb{C}}$.

Бесконечно удаленными точками $\overline{\mathbb{C}}^n$ являются те точки, у которых хотя бы одна координата бесконечна. Множество всех бесконечно удаленных точек имеет комплексную размерность $n - 1$.

Топология в $\overline{\mathbb{C}}^n$ вводится как в декартовом произведении топологических пространств. В этой топологии $\overline{\mathbb{C}}^n$ компактно (см., например, [4–6]).

Область $\mathbb{B} = B_1 \times B_2 \times \dots \times B_n \subset \overline{\mathbb{C}}^n$, где каждая область $B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$ называется полицилиндрической областью в $\overline{\mathbb{C}}^n$ (см., например, [4]). Области B_k , $k = \overline{1, n}$ назовем координатными областями выше указанной полицилиндрической области \mathbb{B} . В дальнейшем всюду для краткости будем обозначать полицилиндрическую область \mathbb{B} через ее координатные области следующим образом $\mathbb{B} = \{B_k\}_{k=1}^n$.

Обобщенным внутренним p -радиусом, $p \in \mathbb{N}$, $p \leq n$ полицилиндрической области \mathbb{B} в точке \mathbb{A} ($\mathbb{A} \in \mathbb{B}$), будем называть величину

$$\mathbb{R}_p(\mathbb{B}, \mathbb{A}) := \left[\prod_{k=1}^p r(B_k, a_k) \right]^{\frac{1}{p}}, \quad p \in \mathbb{N}, \quad p \leq n$$

где $r(B_k, a_k)$ – внутренний радиус координатной области B_k в точке a_k . Если $p = n$, тогда обобщенный внутренний p -радиус будем называть просто обобщенным внутренним радиусом

$$\mathbb{R}(\mathbb{B}, \mathbb{A}) = \left[\prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \right]^{\frac{1}{n}}.$$

Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$. Систему точек $\Delta_m := \{a_k \in \mathbb{C} : k = \overline{1, m}\}$ назовем *m -лучевой*, если $|a_k| \in \mathbb{R}^+$ при $k = \overline{1, m}$,

$$0 = \arg a_1 < \arg a_2 < \dots < \arg a_m < 2\pi.$$

Систему точек $\{\mathbb{A}_k\}$ ($\mathbb{A}_k = \{a_p^{(k)}\} \in \mathbb{C}^n$), $k = \overline{1, m}$ назовем *лучевой*, если при каждом фиксированном p_0 последовательность $\{a_{p_0}^{(k)}\}$, $k = \overline{1, m}$, является m -лучевой системой точек, $p_0 = \overline{1, n}$.

В данной работе мы будем рассматривать лучевые системы точек следующего вида:

$$\mathbb{A}_1 = \{1, 1, \dots, 1\}, \quad (\text{то есть } a_p^{(1)} = 1, \quad p = \overline{1, n}), \quad (1)$$

$$\arg a_p^{(k)} < \arg a_p^{(k+1)}, \quad k = \overline{1, m-1}, \quad \arg a_p^{(m)} < 2\pi, \quad p = \overline{1, n}.$$

Система $\{\mathbb{B}_k\}$ ($\mathbb{B}_k = \{B_p^{(k)}\}_{p=1}^n$, $k = \overline{1, m}$) называется системой полицилиндрических неналегающих областей, если при каждом фиксированном p_0 , $p_0 = \overline{1, n}$, система областей $\{B_{p_0}^{(k)}\}$, $k = \overline{1, m}$ является системой неналегающих областей на $\overline{\mathbb{C}}$.

На комплексной плоскости \mathbb{C} для произвольной m -лучевой системы точек $\Delta_m = \{a_k\}_{k=1}^m$ и $\gamma \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ полагаем

$$L^{(\gamma)}(\Delta_m) := \prod_{k=1}^n \left[\chi \left(\left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|^{\frac{1}{2\alpha_k}} \right) \right]^{1-\frac{1}{2}\gamma\alpha_k^2} \prod_{k=1}^n |a_k|^{1+\frac{1}{4}\gamma(\alpha_k+\alpha_{k-1})},$$

где $\chi(t) = \frac{1}{2}(t + t^{-1})$, $\alpha_k := \frac{1}{\pi} \arg \frac{a_{k+1}}{a_k}$, $\alpha_{m+1} := \alpha_1$, $k = \overline{1, m}$.

Тогда для произвольной лучевой системы точек вида (1) обозначим

$$\mathbb{L}^{(\gamma)}(\{\mathbb{A}_m\}) := \left\{ L^{(\gamma)}(\{a_1^{(k)}\}_{k=1}^m), L^{(\gamma)}(\{a_2^{(k)}\}_{k=1}^m), \dots, L^{(\gamma)}(\{a_p^{(k)}\}_{k=1}^m) \right\}.$$

Рассмотрим функционал

$$J_m(\gamma) = \mathbb{R}^\gamma(\mathbb{B}_0, \mathbb{A}_0) \prod_{k=1}^m \mathbb{R}(\mathbb{B}_k, \mathbb{A}_k),$$

где $\gamma \in \mathbb{R}^+$, $\mathbb{A}_0 = (0, 0, \dots, 0)$, $\mathbb{A}_k \in \mathbb{B}_k \subset \overline{\mathbb{C}}^n$, $k = \overline{0, m}$ и система $\{\mathbb{B}_k\}_{k=0}^m$ является системой взаимно неналегающих полицилиндрических областей в $\overline{\mathbb{C}}^n$.

Тогда имеет место следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $m \geq 5$, $\gamma \in (0, \sqrt[3]{m}]$, $\mathbb{A}_0 = (0, 0, \dots, 0)$. Тогда для произвольной лучевой системы точек вида (1) $\{\mathbb{A}_k\} = \{a_p^{(k)}\}_{k=1}^m \in \mathbb{C}^n$ такой, что $\mathbb{L}^{(\gamma)}(\mathbb{A}_n) = (1, 1, \dots, 1) = \mathbf{1}$, $\mathbb{L}^{(0)}(\mathbb{A}_n) = \mathbf{1}$ и любого набора взаимно непересекающихся полицилиндрических областей \mathbb{B}_k , $\mathbb{A}_k \in \mathbb{B}_k \subset \overline{\mathbb{C}}^n$ ($k = \overline{0, m}$), справедливо следующее неравенство

$$\mathbb{R}^\gamma(\mathbb{B}_0, \mathbb{A}_0) \prod_{k=1}^m \mathbb{R}(\mathbb{B}_k, \mathbb{A}_k) \leq \left(\frac{4}{m} \right)^m \frac{\left(\frac{4\gamma}{m^2} \right)^{\frac{\gamma}{m}}}{\left(1 - \frac{\gamma}{m^2} \right)^{m+\frac{\gamma}{m}}} \left(\frac{1 - \frac{\sqrt{\gamma}}{m}}{1 + \frac{\sqrt{\gamma}}{m}} \right)^{2\sqrt{\gamma}}.$$

Доказательство теоремы 1. Сделаем следующее преобразование

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}^\gamma(\mathbb{B}_0, \mathbb{A}_0) \prod_{k=1}^m \mathbb{R}(\mathbb{B}_k, \mathbb{A}_k) &= \\
&= \left[\prod_{p=1}^n r(B_p^{(0)}, a_p^{(0)}) \right]^{\frac{\gamma}{n}} \prod_{k=1}^m \left[\prod_{p=1}^n r(B_p^{(k)}, a_p^{(k)}) \right]^{\frac{1}{n}} = \\
&= \left[\prod_{p=1}^n \left[r^\gamma(B_p^{(0)}, a_p^{(0)}) \prod_{k=1}^m r(B_p^{(k)}, a_p^{(k)}) \right] \right]^{\frac{1}{n}}.
\end{aligned}$$

Тогда для фиксированного $p = \overline{1, n}$ области $B_p^{(k)}$, $k = \overline{0, m}$, образуют систему неналегающих областей на $\overline{\mathbb{C}}$. Поэтому следуя работе [15], имеем

$$r^\gamma(B_p^{(0)}, a_p^{(0)}) \prod_{k=1}^m r(B_p^{(k)}, a_p^{(k)}) \leq \left(\frac{4}{m} \right)^m \frac{\left(\frac{4\gamma}{m^2} \right)^{\frac{\gamma}{m}}}{\left(1 - \frac{\gamma}{m^2} \right)^{m + \frac{\gamma}{m}}} \left(\frac{1 - \frac{\sqrt{\gamma}}{m}}{1 + \frac{\sqrt{\gamma}}{m}} \right)^{2\sqrt{\gamma}}.$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}^\gamma(\mathbb{B}_0, \mathbb{A}_0) \prod_{k=1}^m \mathbb{R}(\mathbb{B}_k, \mathbb{A}_k) &\leq \left[\prod_{p=1}^n \left(\frac{4}{m} \right)^m \frac{\left(\frac{4\gamma}{m^2} \right)^{\frac{\gamma}{m}}}{\left(1 - \frac{\gamma}{m^2} \right)^{m + \frac{\gamma}{m}}} \left(\frac{1 - \frac{\sqrt{\gamma}}{m}}{1 + \frac{\sqrt{\gamma}}{m}} \right)^{2\sqrt{\gamma}} \right]^{\frac{1}{n}} = \\
&= \left(\frac{4}{m} \right)^m \frac{\left(\frac{4\gamma}{m^2} \right)^{\frac{\gamma}{m}}}{\left(1 - \frac{\gamma}{m^2} \right)^{m + \frac{\gamma}{m}}} \left(\frac{1 - \frac{\sqrt{\gamma}}{m}}{1 + \frac{\sqrt{\gamma}}{m}} \right)^{2\sqrt{\gamma}}.
\end{aligned}$$

Теорема 1 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лаврентьев М. А. К теории конформных отображений // Тр. Физ.-мат. ин-та АН СССР. – 1934. – 5. – С. 159 – 245.
2. Голузин Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. – М: Наука, 1966. – 628 с.
3. Хейман В. К. Многолистные функции. - М.: Изд-во иностр. лит., 1960. – 180 с.

4. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ, Ч. I., II. – М.: «Наука», 1976.
5. Чирка Е. М. Комплексные аналитические множества. – М.: «Наука», 1985. – 272 с.
6. Фукс Б. В. Введение в теорию аналитических функций многих комплексных переменных, Физматгиз, 1962.
7. Дженкинс Дж. А. Однолистные функции и конформные отображения. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 256 с.
8. Дубинин В. Н. Метод симметризации в геометрической теории функций комплексного переменного // Успехи мат. наук. – 1994. – 49, № 1(295). – С. 3 – 76.
9. Дубинин В. Н., Прилепкина Е. Г. Об экстремальном разбиении пространственных областей // Зап. науч. сем. ПОМИ – 1998., Т. 254 – С. 95 – 107.
10. Бахтин А. К., Бахтина Г. П., Зелинский Ю. Б. Тополого-алгебраические структуры и геометрические методы в комплексном анализе. // Праці ін-ту мат-ки НАН Укр. – 2008. – Т. 73. – 308 с.
11. Бахтин А.К. Обобщение некоторых результатов теории однолистных функций на многомерные комплексные пространства// Доп. НАН України. – 2011. – №3. – С. 7 – 11.
12. Бахтин А.К., Бахтина Г.П., Денег И.В. Задача о произведении степеней обобщенных конформных радиусов для неналегающих областей в \mathbb{C}^n //Збірник праць Ін-ту матем. НАН України. – К.: Ін-т матем. НАН України, 2010. – Т.7, №2. – С. 180 – 186.
13. Бахтин А.К. Обобщение некоторых результатов теории однолистных функций на многомерные комплексные пространства// Доп. НАН України. – 2011. – №3. – С. 7 – 11.
14. Заболотний Я.В. Про одну екстремальну задачу В.М. Дубиніна// Укр. мат. журн. – 2012. – №1. – С. 24 – 31.
15. Денег И. В. Квадратичные дифференциалы и разделяющее преобразование в экстремальных задачах о неналегающих областях// Доп. НАН України. – 2012. – №4. – С. 15 – 19.